Формулировка целей и задачи работы
Комментарий

После 2000 года, в связи с возросшими возможностями вычислительной техники, появляются работы по использованию дивергентной формы кинетических уравнений. Разрабатываются ряд численных процедур на основе дивергентной формы кинетических уравнений для решения задач динамики разреженного газа. Подобные проблемы становятся темами статей, диссертаций и докладов на различных форумах. Достаточно указать публикации, которые были также представлены на международных форумах, и по которым можно восстановить библиографию подобных работ. Это в первую очередь работы Mikhail S. Ivanov, E.A. Malkov, [5], V. L. Saveliev и K. Nanbu, [6].

Однако, дивергентная форма кинетических уравнений была получена за долго до этих работ в 1980 году. Она была опубликована в сборнике научных работ тогда Ленинградского ныне Санкт–Петербургского Университета [1]. Работа содержит много дополнительных результатов, является ныне не очень легко доступной, что и привело к необходимости публикации ее копии на сайте.

Цель работы — получение нового вида интегродифференциального уравнения — "дивергентных кинетических уравнений" для описания движения разреженного газа. Вывод его интегрального аналога с возможностью построения интегральных итераций, в которых траектории частиц формируются с учетом вектор-функции $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$, т.е. с учетом столкновений усредненных в пространстве скоростей частиц. В настоящей работе рассмотрен вопрос об обобщении на случай неоднородной газовой смеси, анализируется безразмерная форма дивергентных кинетических уравнений, проводится физическая интерпретация, полученных уравнений, построены модели самосогласованного поля в задачах временной и пространственной релаксации.

Левая часть интегродифференциального уравнения Больцмана представляет дивергенцию в пространстве координат от вектора потока $\mathbf{u}f(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$, в сумме: с дивергенцией в пространстве скоростей частиц от вектора потока $1/m\ \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) f(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$ и частной производной $\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t)$ - внешнее силовое поле. Дивергентное представление интеграла столкновений в пространстве скоростей частиц от вектора потока $1/m\, \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)\ f(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$ и переход к системе дивергентных кинетических уравнений был предложен Б. В. Филипповым, в качестве одной из тем кандидатской диссертации

В. Б. Христинича. Вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$ позволяет описать баланс частиц в элементе фазового объема и записать уравнение для функции распределения с самосогласованным полем, которое по своей структуре является более общим, чем уравнение Больцмана, но конкретная связь между дивергенцией от вектора потока $1/m\ \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)\ f(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t)$ и интеграла столкновений гарантирует описание движения разреженного газа в рамках подхода Больцмана.

Первая презентация работы прошла в докладе на V Всесоюзной школе–семинаре по моделям механики сплошной среды, Рига, 1979г. Руководитель академик Яненко Н.Н. Приведем основные апробации работы.

- Кандидатская диссертация и автореферат Христинича В.Б. 1980г. "Некоторые проблемы решения нелинейного уравнения Больцмана. "Ленинградский государственный Университет. 1980 г., 156 с.

- Высшая аттестационная комиссия при Совете Министров СССР. Москва, 8 июля 1981 г. (в присутствии ведущих ученых страны по численному анализу)

- Доклады на различных отечественных и международных семинарах и конференциях. приведенные на сайте в разделе "Full Publication List".

- Отметим одно из последних обсуждений дивергентных кинетических уравнений.

  Khristinich V. B. Equivalent Field of Force to Collision Integral and Divergence Form of the Kinetic Equations. // Proceedings of the Sixth International St.Petersburg Workshop on Simulation. St. Petersburg, Russia, 2009.

  Последующие обсуждения, доклады и публикации можно найти в работах Mikhail S. Ivanov, которому я выражаю искренneю признательность за внимание и существенное развитие данной темы.

Первой решенной задачей для численных методов на основе дивергентных кинетических уравнений, кроме выше перечисленных, было построение "Сеточного аналога дивергентной формы кинетического уравнения Больцмана" [4]. Хорошо известно, что дивергентные формы уравнений содержат искомые величины под знаками дифференциальных операторов. Последнее позволяет понизить размерность задачи при их интегрировании и не только в численных процедурах. Работа представлена на сайте.

Сделаем сразу терминологическое замечание. Термин "Консервативные разностные и вычислительные схемы для численного решения уравнения Больцмана" , который использовался в более ранних работах автора [2, 3], не совсем уместен. Подобная терминология ранее устойчиво закрепилась за разностными уравнениями газовой динамики в работах академика Самарского А.А и Попова Ю.П. и других авторов. Под "Сеточным аналогом дивергентной формы кинетического уравнения Больцмана" , понимаются разностные и вычислительные схемы, для которых на элементарной или сеточной ячейке выполняются законы, положенные в основу вывода уравнения. В данном случае — баланс частиц в фазовой ячейке, который лежит в основе вывода уравнения Больцмана. И термин "Сеточный аналог уравнения" можно применять к различным уравнениям.

Литература

[1] *Филиппов Б.В., Христинич В.Б.* Кинетические уравнения динамики разреженного газа в дивергентной форме. — В кн.: Физическая механика, Л., Изд-во ЛГУ, вып. 4, 1980, с. 7–18.

B.V Filippov and V.B. Khristinich "Kinetic equations of rarefied gas dynamics in divergent form,"in: Dynamic Processes in Gases and Plasma. Physical Mechanics (collected scientific papers) [in Russian], Izd. Leningr. Univ., Leningrad, No. 4, pp. 7–18 (1980)

[2] *Христинич В.Б.* Численное решение кинетического уравнения Больцмана в стационарном случае. В кн.: Физическая механика. Л., Изд-во Ленгосуниверситета Вып. 2, 1976г., с. 88-98.

[3] *Христинич В.Б.* Консервативные разностные и вычислительные схемы для численного решения уравнения Больцмана в стационарном, одномерном случае. В кн.: Физическая механика., Л., Изд-во Ленгосуниверситета, Вып. 3, 1978г., с. 44-54.

[4] *Христинич В.Б.* Сеточный аналог дивергентной формы кинетического уравнения. // Математическое моделирование систем и явлений. Изд-во Кольского филиала АН СССР, 1986 г., с. 47-53

[5] *Mikhail S. Ivanov, E.A. Malkov* Particle-in-Cell method for solving the Boltzmann equation. 10th AIAA/ASME Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference 28 June - 1 July 2010, Chicago, Illinois. Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, AIAA 2010-4503.

[6] *Saveliev V.L., Nanbu K.* Exact Forms of Representation of Boltzmann Collision Integral as a Divergence of the Flow in Velocity Space, Proceedings of the 24th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics, Vol. 762, Tohoku University, Sendai, Japan, 2005, pp. 114-119.

**ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А.
ЖДАНОВА**

ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Выпуск 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ГАЗАХ И ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

Межвузовский сборник

Под редакцией Б. В. Филиппова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ЛЕНИНГРАД 1980

0.1 Кинетические уравнения динамики разреженного газа в дивергентной форме

Эквивалентные с математической точки зрения формы записи кинетических уравнений приводят к возможности разработки различных численных методов динамики разреженного газа. Интегральные кинетические уравнения и их варианты, полученные в [1, 2] используются во многих численных исследованиях. Немаловажным является тот факт, что эти варианты можно получить, опираясь на определенные феноменологические представления, которые являются основой для построения методов прямого моделирования движения разреженного газа [3, 4, 5]. Методы статистического моделирования [6] также основываются на возможности получения форм записи кинетических уравнений, совпадающих с основным уравнением некоторого случайного процесса. Многократное моделирование на ЭВМ реализаций случайного процесса позволяет получить в итоге интересующие нас величины [7, 8].

Успех многих направлений численных методов динамики разреженного газа существенно зависит от удачного упрощения сложной структуры кинетического уравнения или возможности замены реального процесса моделирующим, реализация которого более эффективна. Цель настоящей работы — формальное построение и вывод системы кинетических, эквивалентных уравнению Больцмана. Полученные уравнения подобны уравнению с самосогласованным полем, но в отличие от уравнения Власова самосогласованное поле в дивергентных кинетических уравнениях определяется из соотношения между интегралом столкновений и дивергенцией от некоторого вектора потока в пространстве скоростей частиц.

0.2 Построение системы "дивергентных кинетических уравнений"

Будем исходить из кинетического уравнения для одночастичной функции распределения

$$\frac{D}{Dt} f\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;=\; J(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\,, \quad t\in[0,T]\,, \quad \mathbf{r}\in D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}\in\Omega(\mathbf{u})\,, \tag{1}$$

где

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{r}}) + \left(\frac{1}{m}\right)(\mathbf{G}\,(\mathbf{r},t\,)\cdot\nabla_{\mathbf{u}})$$

-индивидуальная производная, $\mathbf{G}(\mathbf{r},t\,)$ - внешнее поле сил, $f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$ – распределение Больцмана, $\nabla_{\mathbf{r}}$ и $\nabla_{\mathbf{u}}$ – операторы набла в физическом $D(\mathbf{r}) \subset R^3$ и скоростном $\Omega(\mathbf{u})$ пространствах соответственно,

$$J(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;=\; \Phi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;-\; f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\; Q(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$$

- интеграл столкновений. Для уравнения Больцмана

$$\begin{aligned}\Phi(f,f) \equiv \Phi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) = \int_{(\mathbf{u}_1)} \int_{(\mathbf{u}_2)} &|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| \sigma\left(|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|\right) \times \\ &\times f\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{r},t\,\right) f\left(\mathbf{u}_2,\mathbf{r},t\,\right) T\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}\right) d\boldsymbol{\omega}_1 d\boldsymbol{\omega}_2\ ,\end{aligned} \tag{1.1}$$

— интеграл обратных столкновений (функция рождения [1]),

$$Q(f) \equiv Q(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) = \int_{(\mathbf{u}_1)} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \sigma\left(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|\right) f(\mathbf{u}_1,\mathbf{r},t\,) d\boldsymbol{\omega}_1\ , \tag{1.2}$$

— частота столкновений, T — вероятностная характеристика результатов столкновений частиц между собой, $\sigma\left(|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|\right)$ — сечение столкновения, m — масса частиц.

Будем предполагать, что наряду с дивергенцией от вектора потока $\mathbf{u}f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$, в физическом пространстве $\Omega(\mathbf{r}) \subset R^3$ и с дивергенцией в пространстве скоростей частиц $\Omega(\mathbf{u}) \subset R^3$ от вектора потока $1/m\ \mathbf{G}(\mathbf{r},t\,)f()$, которые входят в левую "конвективную"часть уравнения (1), существует некоторое векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$. И, возможно дивергентное представление интеграла столкновений в $\Omega(\mathbf{u})$ от вектора потока $1/m\ \mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ f()$, и выполнено соотношение

$$\nabla_{\mathbf{u}} \left(\frac{1}{m}\ \mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \right) \;=\; -\ J(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ . \tag{2}$$

Введение такого представления интеграла столкновений в общем и определяет ход дальнейших рассуждений. Считаем, что движение ансамбля частиц газа из бесконечно малого элемента $\delta(\mathbf{u}) \subset \Omega(\mathbf{u})$ описывается уравнением:

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{u} \;=\; \mathbf{G}(\mathbf{r},t\,) \;+\; \mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ , \quad \mathbf{u} \in \delta(\mathbf{u})\ ,\ \dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{u}\ . \tag{3}$$

При известном $\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$ можно разрешить уравнение движения (3), т.е. из известных в момент времени t :

$$\begin{cases} \mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}(t)\ , \\ \mathbf{u} \;=\; \mathbf{u}(t)\ ; \end{cases}$$

построить момент времени τ:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\tau,t} \ = \ \mathbf{r}_{\tau,t}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ , \\ \mathbf{u}_{\tau,t} \ = \ \mathbf{u}_{\tau,t}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ . \end{cases} \tag{4}$$

И последнее из наиболее важных предположений касается безвихревого характера поля $\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$ и существования потенциала $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$

$$\nabla_{\mathbf{u}}\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \ = \ \frac{1}{m}\,\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ . \tag{5}$$

Подобное ограничение не является принципиальным, но в данной работе будем оставаться в рамках предположения (5). В общем случае можно требовать наличие не только скалярного потенциала $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$, но и векторного.

В кинетическом уравнении (1) заменим интеграл столкновений, пользуясь определением (2)

$$\frac{D}{Dt}f\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)+\frac{1}{m}\,(\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\cdot\nabla_{\mathbf{u}})\,f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)+\frac{1}{m}f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\,(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,))=0, \tag{6}$$

$$\text{где}\quad t\in[0,T]\,,\quad \mathbf{r}\in D(\mathbf{r}),\quad \mathbf{u}\in\Omega(\mathbf{u})\ .$$

Введем новую индивидуальную производную

$$\frac{D_{\mathbf{u}}}{Dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla_{\mathbf{r}})+\frac{1}{m}\,((\mathbf{G}\,(\mathbf{r},t\,)+\mathbf{F}\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,))\cdot\nabla_{\mathbf{u}})$$

получим другую запись уравнения (6):

$$\frac{D_{\mathbf{u}}}{Dt}f\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)+\frac{1}{m}f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\,(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,))=0, \tag{6.1}$$

$$\text{где}\quad t\in[0,T]\,,\quad \mathbf{r}\in D(\mathbf{r}),\quad \mathbf{u}\in\Omega(\mathbf{u})\ .$$

Подстановка (5) в (2) приводит к уравнению Пуассона для скалярного потенциала $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$

$$\triangle_{\mathbf{u}}\varphi\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \ = \ -J\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ ,\quad \text{так как}\ \triangle_{\mathbf{u}} \ = \ (\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}) \tag{7}$$

Выпишем систему полученных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{D_{\mathbf{u}}}{Dt}f\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)+\frac{1}{m}f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\,(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,))=0\ , \\ \\ \nabla_{\mathbf{u}}\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \ = \ \frac{1}{m}\,\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ , \\ \\ \triangle_{\mathbf{u}}\varphi\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \ = \ -J\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\ , \end{cases} \tag{\textbf{I}}$$

где неизвестная функция $f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$ должна удовлетворять заданным граничным и начальным условиям, а потенциал $\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$ удовлетворять краевому условию, что является следствием интегрируемости $J(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)$ по $(\mathbf{u})$

$$\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;=\; \bigcirc\left(\frac{1}{|\mathbf{u}|}\right)\;, \quad |\mathbf{u}| \;\to\; \infty\;.$$

В этом случае можно найти решение уравнения Пуассона (7), которое имеет единственное решение

$$\varphi\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;=\; \frac{1}{4\pi}\,\int_{(\mathbf{u}')}\frac{J\,(\mathbf{u}',\mathbf{r},t\,)}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|}\;d\boldsymbol{\omega}', \tag{8}$$

и получить выражение для векторного поля $\mathbf{F}$ через интеграл столкновений

$$\mathbf{F}\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;=\; \frac{m}{f\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)}\nabla_{\mathbf{u}}\left(\frac{1}{4\pi}\,\int_{(\mathbf{u}')}\frac{J\,(\mathbf{u}',\mathbf{r},t\,)}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|}\;d\boldsymbol{\omega}'\right)\;. \tag{9}$$

Легко проверить, что обратный переход к уравнению Больцмана осуществим, если в уравнение (6) (первое уравнение системы ($\mathbf{I}$) подставить выражение для векторного поля $\mathbf{F}$:

$$\frac{D}{Dt}f\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;=\; -\,(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\nabla_{\mathbf{u}})\,\frac{1}{4\pi}\,\int_{(\mathbf{u}')}\frac{J\,(\mathbf{u}',\mathbf{r},t\,)}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|}\;d\boldsymbol{\omega}' \;=\; J\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\;.$$

Из этого следует, что введение представления интеграла столкновений (2) не противоречит исходной задаче для кинетического уравнения при выполнении соответствующих ограничений на $\mathbf{F}$, φ, J.

0.3 Обобщение на случай неоднородной газовой смеси

Рассмотрим для простоты бинарную смесь газов и пусть $f_1(\mathbf{u}_1,\mathbf{r},t\,)$, $f_2(\mathbf{u}_2,\mathbf{r},t\,)$ - распределения Больцмана двух компонент соответственно. Функции f_1 и f_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{D_1}{Dt}f_1\,(\mathbf{u}_1,\mathbf{r},t\,) \;=\; J_{1,1}(f_1,f_1) \,+\, J_{1,2}(f_1,f_2)\,, \\ \\ \frac{D_2}{Dt}f_2\,(\mathbf{u}_2,\mathbf{r},t\,) \;=\; J_{2,2}(f_2,f_2) \,+\, J_{2,1}(f_2,f_1)\,; \end{cases} \tag{9}$$

$$t\in[0,T]\,, \quad \mathbf{r}\in D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u}_i\in\Omega(\mathbf{u})\;, \quad i \,=\, 1,2\;;$$

где

$$\frac{D_i}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) + \left(\frac{1}{m_i}\right) (\mathbf{G}\,(\mathbf{r}, t\,) \cdot \nabla_{\mathbf{u}_i}) \ , \quad i \,=\, 1, 2 \,;$$

-индивидуальная производная, $\mathbf{G}(\mathbf{r}, t\,)$ - внешнее поле сил, $J_{i,j}$ интеграл столкновений для частиц сорта i, j. Введем дивергентное представление интегралов столкновения $J_{i,j}$ по следующему правилу:

$$\nabla_{\mathbf{u}_i} \left(\frac{1}{m_i}\ \mathbf{F}_{i,j}(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}, t\,)\ f_i(\mathbf{u}_i, r, t)\right) \ = \ -\ J_{i,j}(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}, t\,) \ , \quad i\,, j \ = \ 1, 2\,; \qquad (10)$$

m_i – масса частиц газа.

Обозначим индивидуальные производные по траекториям частиц i-го сорта через

$$\frac{D_{\mathbf{u}_i}}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla_{\mathbf{r}}) + \left(\frac{1}{m_i}\right) [\{\mathbf{G}\,(\mathbf{r}, t\,) + \mathbf{F}_{i,i} + \mathbf{F}_{i,j}\} \cdot \nabla_{\mathbf{u}_i}] \ , \quad i\,, j \ = \ 1, 2\,;$$

тогда "дивергентные кинетические уравнения"для неоднородной газовой смеси следующие:

$$\begin{cases} \frac{D_{\mathbf{u}_1}}{Dt} f_1\,(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}, t\,) \ + \frac{1}{m_1}\ f_1\ \ [\nabla_{\mathbf{u}_1} \cdot (\mathbf{F}_{1,1} + \mathbf{F}_{1,2})] \ = \ 0\,, \\ \frac{D_{\mathbf{u}_2}}{Dt} f_2\,(\mathbf{u}_2, \mathbf{r}, t\,) \ + \frac{1}{m_2}\ f_2\ \ [\nabla_{\mathbf{u}_2} \cdot (\mathbf{F}_{2,2} + \mathbf{F}_{2,1})] \ = \ 0\,. \end{cases}$$

0.4 Безразмерная форма дивергентных кинетических уравнений

Пусть задаче соответствуют некоторые характерные величины и равновесное состояние газа со следующим набором величин: $\mathbf{V}_0,\ n_0,\ T_0$ — средняя скорость, числовая плотность, температура, $c_0 = \sqrt{2kT_0/m}$ — наиболее вероятная скорость; $L,\ \ \sigma_0\ \ , W$ — характерные: размер, сечение столкновения, внешняя сила и, если λ — длина свободного пробега, то $\mathrm{Kn} = \lambda/L,\ \ mc_0^2/(W\ L) = \mathrm{Fr}$ - числа Кнудсена и Фруда. Уравнение Больцмана в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{r}})\, f + \left(\frac{1}{\mathrm{Fr}}\right) (\mathbf{G} \cdot \nabla_{\mathbf{u}})\, f \ = \ \left(\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{Kn}}\right) (\Phi \ - \ f\ Q) \ , \qquad (1')$$

где значение функции распределения отнесено к n_0/c_0^3 , частота столкновений Q к $n_0\sigma_0 c_0$ и интеграл обратных столкновений Φ к $n_0^2\sigma_0/c_0^2$.

Выведем безразмерное значение векторного поля $\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)$.

$$\mathbf{F}^{*}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,) \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)\frac{L}{mc_0^2}\;.$$

Опуская звездочки у безразмерных величин, запишем основные соотношения для $\mathbf{F}$ в безразмерном виде:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)\; f(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)\right) \;=\; -\;\left(\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{Kn}}\right)\; J(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)\;; \tag{2'}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u} \;=\; \left(\frac{1}{\mathrm{Fr}}\right)\mathbf{G}(\mathbf{r}, t\,) \;+\; \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)\;, \quad \mathbf{u} \in \delta(\mathbf{u})\;,\; \dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{u}\;; \tag{3'}$$

$$\nabla_{\mathbf{u}}\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,) \;=\; \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)\; f(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,)\;; \tag{5}$$

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,\right) \;=\; \frac{1}{4\sqrt{2}\pi \mathrm{Kn} f\left(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,\right)}\nabla_{\mathbf{u}}\left(\;\int_{(\mathbf{u}')}\frac{J\left(\mathbf{u}', \mathbf{r}, t\,\right)}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|}\; d\boldsymbol{\omega}'\right)\;.$$

0.5 Физическая интерпретация дивергентной формы кинетических уравнений

С ростом числа Кнудсена движение частиц будет проходить по траекториям:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} \;=\; \left(\frac{1}{\mathrm{Fr}}\right)\mathbf{G}(\mathbf{r}, t\,)\;, \quad \mathbf{u} \in \delta(\mathbf{u})\;,\; \dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{u}\;,$$

т.е. наступит предельный свободномолекулярный режим. Уравнение (1'), как и полученное уравнение в дивергентной форме (6) вырождаются в одночастичное уравнение Лиувилля

$$\frac{D}{Dt}f\left(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,\right) \;=\; 0\;, \quad t \in [0, T\,]\;, \quad \mathbf{r} \in D(\mathbf{r}), \quad \mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{u})\;.$$

Суммарное число частиц δN, которые входят и выходят из движущегося фазового элемента $\delta(\mathbf{r})\delta(\mathbf{u})$ за $\delta(t) \to 0$ равно

$$\delta N \;=\; \delta(\mathbf{u})\delta(\mathbf{r})\delta(t)\,\frac{D}{Dt}f\left(\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\,\right) \;=\; 0\,,$$
$$\delta(t) \in [0, T\,]\;, \quad \delta(\mathbf{r}) \in D(\mathbf{r}), \quad \delta(\mathbf{u}) \in \Omega(\mathbf{u})\;.$$

В трактовке Больцмана исходным является соотношение, согласно которому, если частицы не взаимодействуют, то $\delta N \;=\; 0$. Если в газе имеют место столкновения частиц, то нельзя утверждать, что ни одна из частиц не покинет этот объем или не родится в результате столкновений. В этом случае, следуя известному выводу [9, 1], получим:

$$\delta N = \delta N_+ - \delta N_- = \delta(\mathbf{u})\delta(\mathbf{r})\delta(t)\left(\Phi(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) - f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\; Q(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\right) \;.$$

Гипотеза разреженности реализуется в предположении, что исключая малые промежутки времени взаимодействия, частицы движутся по бесстолкновительным траекториям. Как видно из предыдущей части работы, предложение о том, что в формировании траекторий частиц принимают участие и столкновения, никак не сказалось на получаемые уравнения ($\mathbf{I}$) и будет использоваться нами только при получении интегральной формы дивергентных кинетических уравнений. Если же предполагать, что вектор $\mathbf{F}$ описывает взаимодействие окружающих частиц с $\mathbf{u}$ - частицей, то уравнение (6)

$$\frac{D_{\mathbf{u}}}{Dt} f\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,\right) + \frac{1}{m} f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\left(\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\right) = 0, \tag{6}$$

является подобным уравнению Власова с самосогласованным полем. Из определения $\mathbf{F}$ следует

$$\delta N = \delta N_+ - \delta N_- = -\delta(\mathbf{u})\delta(\mathbf{r})\delta(t)\frac{1}{m}\nabla_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\right) \;.$$

В данном случае

$$-\frac{1}{m}\nabla_{\mathbf{u}}\left(\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\right)$$

можно трактовать как плотность источников и стоков частиц сорта $\mathbf{u}$, введенную непрерывным образом в пространстве скоростей при фиксированных $\mathbf{r} \in \delta\mathbf{r}$ и $t \in \delta t$, $\quad \delta t \to 0$. Во всем пространстве скоростей производство молекулярных признаков, сохраняющихся при отдельных актах столкновении частиц, должно быть нулевым:

$$\int_{(\mathbf{u})} \Psi^i\left(\mathbf{u}\right) \nabla_{\mathbf{u}} \left(\frac{1}{m}\; \mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\; f(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\right)\, d\boldsymbol{\omega} \;=\; 0\;, \quad i \;=\; 1,...,5\;;$$

где $\Psi^i\left(\mathbf{u}\right)$ — аддитивные инварианты столкновения. Последнее полностью согласуется с определением (2) и консервативными свойствами интеграла столкновений

$$\int_{(\mathbf{u})} \Psi^i\left(\mathbf{u}\right)\; J(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\, d\boldsymbol{\omega} \;=\; 0\;, \quad i \;=\; 1,...,5\;.$$

0.6 Решение дивергентных кинетических уравнений

Математическая модель описания газа, предложенная в начале работы допускает применение традиционных методов решения кинетического уравнения Больцмана. Переформулировка методов Чепмена—Энскога, Гильберта, как и Н—теоремы проводится без каких—либо ограничений на случай системы (**I**). Дивергентное представление интеграла столкновений (2) также справедливо, если интеграл столкновений линеаризован или заменен модельным представлением. Тогда в уравнениях системы (**I**) меняется только одно из уравнений. Для модели интеграла столкновений в Круковской форме получим:

$$\begin{cases} \frac{D_{\mathbf{u}}}{Dt} f\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right) + \frac{1}{m} f(\mathbf{u},\mathbf{r},t)\left(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t)\right) = 0\ , \\ \nabla_{\mathbf{u}}\varphi(\mathbf{u},\mathbf{r},t) \ = \ \frac{1}{m}\ \mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t)\ f(\mathbf{u},\mathbf{r},t)\ , \\ \triangle_{\mathbf{u}}\varphi\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right) \ = \ -\frac{1}{\tau}\left(f_M\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right) \ - \ f\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right)\right)\ , \end{cases} \tag{\textbf{II}}$$

где: $f_M \equiv f_M\left(n(\mathbf{r},t),\mathbf{V}(\mathbf{r},t),T(\mathbf{r},t),\mathbf{u}\right)$ — локальное распределение Максвелла, $1/\tau$ — время релаксации $\tau\equiv\tau(\mathbf{r},t)$,

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right) = \frac{m}{4\pi\tau f\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right)}\nabla_{\mathbf{u}}\left(\int_{(\mathbf{u}')}\frac{\left[f_M\left(\mathbf{u}',\mathbf{r},t\right) - f\left(\mathbf{u}',\mathbf{r},t\right)\right]}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|}\ d\boldsymbol{\omega}'\right).$$

В случае локального и глобального равновесного состояния, и $\tau\equiv\tau(\mathbf{r},t)$ вектор–функция $\mathbf{F}\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right)$ может быть представлена в виде равных противоположных по знаку слагаемых

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right) \ = \ \mathbf{F}^{(2)}\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right) \ + \ \mathbf{F}^{(1)}\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right)\ , \quad \mathbf{F}^{(2)}\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right) \ = \ -\mathbf{F}^{(1)}\left(\mathbf{u},\mathbf{r},t\right)\ .$$

Рассмотрим компоненту поля, соответствующую интегралу обратных столкновений в модельном представлении

$$\mathbf{F}^{(2)} \ = \ \frac{m}{4\pi\tau f_M}\nabla_{\mathbf{u}}\left(\int_{(\mathbf{u}')}\frac{f_M\left(\mathbf{u}',\mathbf{r},t\right)}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|}\ d\boldsymbol{\omega}'\right)\ . \tag{12}$$

Для вычисления $\mathbf{F}^{(2)}$ перейдем к безразмерным переменным в (12)

$$\mathbf{F}^{(2)}\frac{\tau}{mc_0} \ = \ \frac{\exp\left((\mathbf{v}-\mathbf{S})^2\right)}{4\pi}\nabla_{\mathbf{v}}\left(\int_{(\mathbf{v}')}\frac{\left[-\exp\left((\mathbf{v}'-\mathbf{S})^2\right)\right]}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\ d\mathbf{v}'\right)\ .$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{u}/c_0$, $\mathbf{S}$ — безразмерная макроскопическая скорость газа. Вычислим

$$\mathrm{Int} = \int_{(\mathbf{v}')} \frac{\exp\left((\mathbf{v}'-\mathbf{S})^2\right)}{|\mathbf{v}-\mathbf{v}'|}\, d\mathbf{v}' = \int_{(\mathbf{v}')} \frac{\exp\left(-c'^2\right)}{|\mathbf{c}-\mathbf{c}'|}\, d\mathbf{c}' , \tag{13}$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \mathbf{S}$; $\mathbf{c}$ — безразмерная собственная скорость газа, $\mathbf{c}' = \mathbf{v}' - \mathbf{S}$, $c = |\mathbf{c}|$,

$$\mathrm{Int} = \pi^{\frac{3}{2}}\, \mathrm{erf}(c)\, /\, c .$$

Окончательно получим

$$\mathbf{F}^{(2)} \frac{\tau}{mc_0} = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\, \mathbf{c}\, \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{c}\, \exp\left(c^2\right)\, \mathrm{erf}\,(c) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) . \tag{14}$$

В том случае, когда функция распределения является локальным распределением Максвелла, вектор—функция $\mathbf{F}^{(2)} = -\mathbf{F}^{(1)}$ имеет направление противоположное собственной скорости частицы. В случае больших и малых значений собственной скорости частицы получаем:

$$\mathbf{F}^{(2)} \sim -\frac{1}{2}\, \mathbf{c}\, \frac{mc_0}{\tau} , \quad c \to 0 ;$$

$$\frac{1}{m}\, f_M\, \mathbf{F}^{(2)} \sim -\, \mathbf{c}\, \frac{n_0}{4\pi\tau c^3 c_0^2} , \quad c \to \infty .$$

Рассмотрим газ, состояние которого в начальный момент времени является однородным. Известно решение модельного кинетического уравнения Крука [I]

$$f\,(\mathbf{u},t) = f_M\,(\mathbf{u}) + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \left[f\,(\mathbf{u},0) - f_M\,(\mathbf{u})\right] , \tag{15}$$

согласно которому функция распределения стремится к равновесной функции $f_M\,(\mathbf{u})$ по экспоненциальному закону с характерным временем релаксации τ . Выражение для векторного поля $\mathbf{F}$ при f из (15) находится в виде

$$\mathbf{F}\,(\mathbf{u},t) = \frac{m \exp\left(-\left(t/\tau + \ln\tau\right)\right)}{4\pi \left[f_M\,(\mathbf{u}) + \exp\left(-t/\tau\right) \left\{f\,(\mathbf{u},0) - f_M\,(\mathbf{u})\right\}\right]} \times \\ \times \nabla_{\mathbf{u}} \int_{(\mathbf{u}')} \frac{\left\{f\,(\mathbf{u}',0) - f_M\,(\mathbf{u}')\right\}}{|\mathbf{u}-\mathbf{u}'|}\, d\boldsymbol{\omega}' . \tag{16}$$

С увеличением времени $t \to \infty, \quad \tau > 0, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}, t) \to 0$ с характерным временем релаксации τ. Согласно системе уравнений (**II**) изменение функции распределения со временем пропорционально дивергенции векторного поля $\mathbf{F}$, которое стремится привести систему частиц разреженного газа к равновесному состоянию и исчезает с его наступлением.

Аналогичную картину можно наблюдать и в случае пространственной релаксации газа, в стационарном состоянии. В системе уравнений (**II**) выберем $1/\tau = Q_\gamma$ (Q_γ — частота столкновений для псевдомаксвелловского газа [10, стр110],

$$Q_\gamma = 6A(8K/m)^{1/2} n(x) \, .$$

В этом случае можно показать, что для бимодального распределения

$$f_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, x) \equiv \nu(x) f_{M\alpha}(\mathbf{u}) + (1 - \nu(x)) f_{M\beta}(\mathbf{u},) \, ,$$

где: $f_{M\alpha} \equiv f_M(n_\alpha, \mathbf{V}_\alpha, T_\alpha, \mathbf{u})$, $\quad f_{M\beta} \equiv f_M(n_\beta, \mathbf{V}_\beta, T_\beta, \mathbf{u})$ — глобальные распределения Максвелла, можно построить решение уравнения Крука в задаче об изолированной ударной волне, полностью совпадающее с решением уравнения Больцмана для максвелловских молекул (см. п.п 2.4). Решения совпадают, если для отыскания перемешивающей функции ν используется $''u_{x^2}''$ моментное уравнение. Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, x) = \frac{m}{4\pi\tau(x) f_{\alpha\beta}} \nabla_{\mathbf{u}} \left(\int_{(\mathbf{u}')} \frac{\left[f'_{M0} - \nu f'_{M\alpha} - (1-\nu) f'_{M\beta} \right]}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|} \, d\boldsymbol{\omega}' \right), \quad (17)$$

здесь $f'_{M0} \equiv f_M(n(\mathbf{r}, t), \mathbf{V}(\mathbf{r}, t), T(\mathbf{r}, t), \mathbf{u})$ — локальное распределение Максвелла с параметрами $f_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, x)$ распределения. Выражение (17) приводится к сумме трех выражений, подобных (14)

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, x) = \mathbf{F}_0(\mathbf{u}, x) - \nu(x)\mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}) - (1 - \nu(x))\mathbf{F}_\beta(\mathbf{u}) \, ,$$

$$\mathbf{F}_i = \frac{m}{4\pi\tau(x) f_{\alpha\beta}(\mathbf{u}, x)} \nabla_{\mathbf{u}} \left(\int_{(\mathbf{u}')} \frac{f'_{Mi}}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|} \, d\boldsymbol{\omega}' \right), \quad i = 0, \alpha, \beta \, .$$

В невозмущенной зоне $\mathbf{F}(\mathbf{u}, x)$ обращается в ноль, так как при

$$x \to -\infty, \quad \nu(x) \to 1; \quad \mathbf{F}_0(\mathbf{u}, x) \to \mathbf{F}_\alpha(\mathbf{u}, x)$$

и при

$$x \to +\infty, \quad \nu(x) \to 0; \quad \mathbf{F}_0(\mathbf{u}, x) \to \mathbf{F}_\beta(\mathbf{u}, x) \, .$$

Встречающиеся квадратуры в (16), (17) вычисляются аналогично (13).

0.7 Дивергентные кинетические уравнения в интегральной форме

Интегрирование уравнения (6) вдоль траекторий (4) найденных при решении уравнения (3), приводит нас к интегральному кинетическому уравнению

$$f\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,) \;=\; f\,(\mathbf{u}_{t^\star,t},\mathbf{r}_{t^\star,t},t^\star)\exp\left\{\int_{t^\star}^{t}\left(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\frac{\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)}{m}\right)_{s,t} ds\right\} \qquad (18)$$

где $(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}()/m)_{s,t}$ — означает, что дивергенция поля вычисляется в момент времени s с учетом значения в момент времени t. Решение уравнения (18) осложняется тем, что мы должны предварительно построить $\mathbf{F}()$ и решить уравнения движения (3), что по сложности эквивалентно решению интегральных кинетических уравнений в обычном представлении [1, 2].

Рассмотрим вопрос о методе последовательных приближений для уравнения (3), (18) в случае отсутствия внешнего поля сил. Зададим нулевое приближение $f^{(0)}$ функции распределения и строим $\mathbf{F}^{(0)}()$. Находим $f^{(1)}$ из (18) при условии: $t^\star \;=\; \max\{t_0,t_k\}$, $\quad t_0$ — начальный момент времени, t_k — наибольший корень уравнения

$$
\begin{aligned}
H\,(\mathbf{r}_{t_k,t}\,(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)) \;=\; 0, \quad H\,(\mathbf{r}_k) \;=\; 0 \quad &- \text{уравнение границы},\\
f_k \equiv f\,(\mathbf{u}_{t_k,t},\mathbf{r}_{t_k,t},t_k) \quad &- \text{граничное значение функции рапределения},\\
f_0 \equiv f\,(\mathbf{u}_{t_0,t},\mathbf{r}_{t_0,t},t_0) \quad &- \text{начальное значение функции рапределения}.
\end{aligned}
$$

В последующих итерациях возникает необходимость решения уравнения движения и при построении n-ой итерации;

$$m\frac{d}{dt}\mathbf{u} \;=\; \mathbf{F}^{(n-1)}(\mathbf{u},\mathbf{r},t\,)\;, \quad \mathbf{u}\in\delta(\mathbf{u})\;,\; \dot{\mathbf{r}} \;=\; \mathbf{u}\;.$$

Траектории

$$\frac{d}{dt}\mathbf{u} \;=\; 0\;, \quad \mathbf{r} \;=\; \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}\,(t-t_0)$$

реализуются при решении уравнения (3) не только в свободномолекулярном пределе Kn $\to\infty$, но и при наступлении локальноравновесного состояния газовой системы в силу $J \;=\; 0$. Отметим характерную черту для дивергентных кинетических уравнений (**I**), (18). При получении приближенных методов описания движения разреженного газа цель может быть достигнута модельным представлением вектор—функции $\mathbf{F}()$, что не скажется на структуре основных уравнений (6), (18).

Литература

[1] *Валландер С.В.* Уравнения и постановка задач аэродинамике разреженных газов. — В кн.: Аэродинамика разреженных газов. Л., Изд-во ЛГУ, вып. 1, 1963, с. 7-37.

[2] *Филиппов Б.В.* Варианты нестационарных кинетических уравнений. Вестник Ленинградского университета, N 1, 1962, с. 142-146.

[3] *Haviland T.K.* The solution of two molecular flow problems by the Monte-Carlo methods. — Methods in Comput. Phys., Adv. Res. Appl., 1965, vol. 4, p. 109-209.

[4] *Bird G.A.* Direct simulation Monter-Carlo methods — current startus and prospects. — In: Rarefied Gas Dynamics. vol. 1, N.Y., 1969, p. 85-98.

[5] *Власов В.И.* Улучшение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для расчета течений разреженных газов. Докл. АН СССР, т. 167, N5, 1966, с. 1016-1018.

[6] *Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е.* Статистический метод частиц в ячейках для решения задая динамики разреженного газа. I. Основы построения метода. Журн. вычислительной математики и математической физики, N5, 1975, с. 1195-1208.

[7] *Ермаков С.М., Некруткин В.В., Прошкин А.Я., Сизова А.Ф.* О решении методом Монте–Карло нелинейного уравнения Больцмана. В кн.: Методы Монте–Карло в вычислительной математики и математической физике, Н., 1974, с. 254-262.

[8] *Григорьев Ю.Н., Иванов М.С., Харитонова Н.И.* К вопросу о решении нелинейных кинетических уравнений динамики разреженных газов методом Монте-Карло. В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Н., т. 2, N4, 1971, с. 101-107.

[9] *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., ИЛ, 1960,510 с.

[10] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М., "Наука 1967, 440 с.