

Формулировка целей и задачи работы

Комментарий

Для исследования источников радиоизлучения и создания радиорелейных линий связи на околоземную орбиту осуществляется вывод перфорированных и сетчатых конструкций, размер которых будет увеличиваться по мере развития технических средств. Подобные конструкции оказывают существенное влияние на аэродинамику систем станция + антенна. Изучение течения газа в переходном режиме в перфорированных границах также важно для конструирования аэродинамических труб низкого давления, разделения изотопов и других вопросов вакуумных технологий. Обзор работ по данному направлению и их оценка изложены в [1]. В настоящее время разрабатываются космические технологии для очищения от мусора ближнего космоса с помощью больших сетей. В этом смысле данная работа является актуальной.

Исследования по аэродинамике решетчатых конструкций и изучение параметров поля течения начались в НИИ математики и механики Ленинградского государственного университета в 1981г. Наряду с проведением экспериментальных исследований, была предложена модельная постановка задачи о течении газа низкой плотности в перфорированных границах. Модельная задача предусматривает разбиение области течения на зоны: до решетки, в сечении и после тела. Для каждой зоны строится модель функции распределения по скоростям частиц. Неизвестные параметры поля течения, входящие в качестве функционалов в выражения для функций распределения, находятся из уравнений сохранения в каждой зоне.

Необходимость модельной постановки задачи обусловлена тем, что даже для простых тел расчет аэродинамических характеристик и поля течения требует значительных затрат времени ЭВМ. Работа планировалась так, чтобы охватить наиболее интересный случай течения — при больших размерах конструкции в целом и малой поверхности ее элементов. Именно в этом случае применение основного метода расчета - статистического моделирования - становится мало эффективным, так как аэродинамические характеристики при счете формируются по малой статистической выборке. Последнее сказывается на точности результатов.

В последние десятилетия актуальным является описание разномасштабных явлений при построении моделей течения газа. Под разномасштабными явлениями будем понимать такие, когда процессы в малом — на микромасштабах оказывают влияние на макромасштабные процессы. К таковым относятся задачи об ударных волнах и данная задача о течении газа низкой плотности в перфорированных границах, которую необходимо классифицировать: как течение в переходном или сплошном режиме для всей конструкции в целом и свободномолекулярном режиме для элементов конструкции.

Работа [2] посвящена краткому изложению ряда результатов по теме: модель течения газа низкой плотности в перфорированных границах. За период с 1981г. построена модель течения газа и появилась возможность получения: аэродинамических характеристик для тел сложной формы и некоторых параметров поля течения. В рамках данной модельной постановки задачи, основное решение строится аналитически. ЭВМ используется для получения интегральных характеристик на основе локального аналитического решения. При интегрировании по поверхности всей конструкции, интегралы заменяются квадратурными суммами по плоским элементам с площадью ΔS_{km} , для которых получено аналитическое решение. В этом смысле, форма поверхности всей конструкции не играет принципиального значения. В работе представлены расчеты для наиболее распространенной параболической формы антенны. Достигнуто совпадение с экспериментами [3].

Работа носит обзорный характер, так как не содержит ряд математических результатов, которые носят объемный характер и, в этой большой работе, затруднили бы восприятие

постановки задачи и результатов. К этим математическим результатам относятся:

1. Уравнения сохранения в каждой из трех зон течения, из которых определяются параметры распределений скоростей частиц, представляют из себя системы семи алгебраических трансцендентных нелинейных уравнений для каждой зоны. В работе приведены результаты этого решения — выражения для макроскопических параметров течения и аэродинамических характеристик перфорированной конструкции. В асимптотическом пределе при больших скоростях набегающего потока построено аналитическое решение не требующее вычисления специальных функций.

С математической точки зрения эту работу можно характеризовать следующим образом. Обобщить соотношения Гюгонио на случай косо́й ударной волны, внутри которой происходит сток импульса и обмен энергии. Если температура поверхности ниже, чем в набегающем потоке, то поток энергии направлен к телу, и наоборот. Это дополнительные сложности, по сравнению просто с обобщением соотношений Гюгонио на предмет косо́го скачка с ударной волной в которой поток энергии однонаправленный.

Поясним математические сложности. Как хорошо известно соотношения Гюгонио выводятся из простой системы алгебраических нелинейных уравнений. Система содержит точку ветвления на тривиальное решение и решение, которое ведет к соотношениям Гюгонио. Выбор ветви не представляет никакой сложности. В данном случае у нас по семь алгебраических трансцендентных нелинейных уравнений для каждой зоны и выбор ветви решения в каждой зоне зависит от параметров конструкции и условий на границах, на большом удалении вверх и вниз по потоку. Как это работает в простом случае, при нулевом угле атаки и плоского перфорированного тела, приводится в статье.

2. Для сопоставления с частью экспериментов, где скорость набегающего потока была низкой [3] и асимптотическое приближение неправомерным, потребовалось разработать комплексы программ: вычисления специальных функций с учетом особых точек, численного решения алгебраических трансцендентных нелинейных систем уравнений, методов интегрирования функций с особенностями [6]. Возникли проблемы общего характера. Как выбрать нужную ветвь решения при численном анализе решения уравнений, так как ряд величин, от которых зависит выбор ветви решения имеет малые значения иногда сравнимые с ошибками вычисления. В этом случае, асимптотическое построенное аналитически решение сыграло большую роль, наряду с тщательным анализом величин влияющих на выбор ветви решения.

Работа была представлена на форумах: [3, 4] и [5].

Список литературы

- [1] *Гувернюк С.В. (Ин-т Мех. МГУ) Аэродинамика компоновок тел с сетчатыми экранами при гиперзвуковом обтекании.* XXVII Академические чтения по космонавтике, Секция 7, Москва 2003г. Комиссия РАН по разработке научного наследия пионеров освоения космического пространства. Российское авиационно-космическое агентство. <http://www.ihst.ru/~akm/XXVII.htm>, <http://www.ihst.ru/~akm/037t.pdf>
- [2] *Khristinich V.B.* The model of supersonic rarefied gas flow around cosmic antennae in the transient regime. Part I., Part II. In St.Petersburg University Mechanics Bulletin. Allerton Press, Inc., Num. 2, 3, New York, 1999, pp. 36-43, pp. 56-65.

Христинич В.Б. Модель сверхзвукового течения разреженного газа в переходном режиме при обтекании космических антенн. Часть I., Часть II. // Вестник С.-Петербург. ун-та, Сер. 1 (мат. мех. астр.), 1998, вып. 2 (№8), с. 113-121., вып. 3 (№15), с. 132-141.

- [3] *Крылов А.А., Рудаков Р.Р., Стариков Б.Б., Христинич В.Б.* Аэродинамика решеток в разреженном газе. // Аэродинамика, тепло и массообмен в разреженном газе: Труды VIII Всесоюзной конф. М., 1987. С. 26–30.
- [4] *Khristinich V.B.* Model of Gas Flow in the perforated bounds for the computation of aerodynamics of the space antennae. Report on 12 International School "Models Of Continuum Mechanics" Kazan, June 28 - July 7, 1993, Programme: Institute of Theoretical and Applied Mechanics, SB, RAS, Novosibirsk, 1993, p.9.
- [5] *Христинич В.Б.* Модель течения газа низкой плотности в перфорированных границах для расчета аэродинамики космических антенн. // Труды XIII сессии международной школы по моделям механики сплошной среды. Издательство Санкт-Петербургского Университета, Санкт-Петербург 1996, с. 65 - 80.
- [6] *Христинич В.Б.* Численная аппроксимация решений в особых точках в задачах об ударных волнах. // Физическая механика, Издательство Санкт-Петербургского Университета, С.-Петербург 1998, вып.(7), с. 50-61.

В. Б. Христинич**МОДЕЛЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА В
ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ ПРИ ОБТЕКАНИИ КОСМИЧЕСКИХ
АНТЕНН. I ***

Санкт-Петербургский государственный университет,
математико-механический факультет
Библиотечная пл.2, С.-Петербург, Петродворец, 198904, Россия
E-mail: Khristinich@mail.ru
URL : <http://www.Khristinich.ru> .

Аннотация*Часть I.*

Рассматривается модель сверхзвукового течения газа в переходном режиме около космических антенн. Модель использовалась для изучения аэродинамических характеристик параболических антенн, проволочные сетчатые элементы которых моделировались перфорированными пластинами. Модель описания неравновесных потоков дает нам возможность определить и ряд параметров в поле течения. Модель течения газа низкой плотности в перфорированных границах развита для прозрачных поверхностей, в случае, когда метод прямого моделирования – Монте-Карло теряет свою эффективность. Приводятся результаты численных исследований аэродинамических характеристик параболических антенн и параметров в поле течения.

Изучение сверхзвукового течения газа в переходном режиме важно для исследования поля течения и аэродинамики перфорированных, сетчатых конструкций, проектирования аэродинамических труб низкого давления, разделения изотопов и других вопросов вакуумной и космических технологий [1].

Стационарная задача обтекания сетчатой конструкции потоком газа низкой плотности расщепляется на задачу внешнего обтекания и внутреннюю, локальную. Это расщепление происходит потому, что при обтекании тела подобие осуществляется по двум числам Кнудсена: $Kn_1 = \frac{l_0}{A}$ и $Kn_2 = \frac{l_0}{L}$, где l_0 — длина свободного пробега в набегающем потоке, A — характерный размер всей конструкции, L — пространственный период конструкции. Значения Kn_1 характерны для переходного, а Kn_2 — для свободномолекулярного режимов обтекания.

Рассмотрим постановку внешней макроскопической задачи.

Пусть тело образовано вращением кривой $x = \Phi(y)$ вокруг оси X (рис. 1). Система координат (X, Y', Z) ориентирована так, что \mathbf{V}_0 — вектор скорости потока газа с углом $(\pi/2 - \theta)$ к оси X , имеет координаты

$$\mathbf{V}_0 = (V_0 \sin(\theta), -V_0 \cos(\theta), 0) .$$

Если $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ — орты (X, Y', Z) , то

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{i}V_0 \sin(\theta) - \mathbf{j}V_0 \cos(\theta) .$$

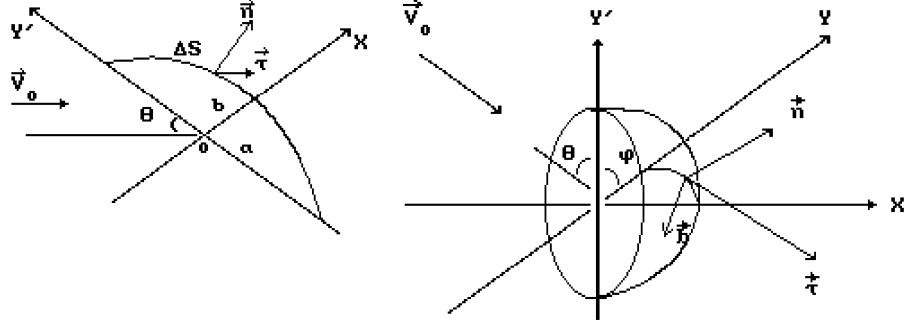


Рис. 1: Положение осей координат.

Вторую систему координат (X, Y, Z') , необходимую для интегрирования по поверхности тела, определим как подвижную при повороте на угол φ вокруг оси X . Система координат $(\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{b})$ связана с поверхностью элемента ΔS . Координаты нормали в (X, Y', Z) :

$$\mathbf{n} = (n_x, n_{y'}, n_z) = (\sin(\gamma), \cos(\gamma) \cos(\varphi), \cos(\gamma) \sin(\varphi)).$$

Угол между нормалью и осью $X - (\pi/2 - \gamma)$. Угол γ в сечении (X, Y) находим из выражения $\tan(\gamma) = -1/x'_y$.

В нашем конкретном случае, если рассматривается параболоид

$$y^2 = -4F(x - x_0),$$

фокусное расстояние $F = a^2/b$, вершина в точке $x_0 = b$, a — диаметр зеркала параболоида, b — глубина, (ориентация на встречу потоку с углом атаки $-\theta$ по отношению к зеркалу параболоида), то

$$x = b(1 - y^2/a^2), \quad \tan(\gamma) = -1/x'_y = a^2/(2by).$$

Таким образом, тип кривой $y = \phi(x)$ определяется только свойством гладкости и монотонности. Если по $y = \phi(x)$ найден $\tan(\gamma)$, то находим

$$TG = \tan(\gamma), \quad STG = \cos(\gamma) = 1/\sqrt{1 + \tan^2(\gamma)}, \quad \sin(\gamma) = TG/STG.$$

При интегрировании по поверхности тела вращения функции $H(\varphi, y, \mathbf{V}_0)$, где $H(\varphi, y, \mathbf{V}_0)$ — какая-либо аэродинамическая характеристика, получим для всей конструкции с характерной площадью $S_0 = \pi a^2$:

$$R(\mathbf{V}_0) = \frac{1}{S_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dy \left(y \sqrt{1 + x'_y} \right) H(\varphi, y, \mathbf{V}_0). \quad (1)$$

Разобьем поверхность на $K \times M$ участков: которые аппроксимируем плоскими элементами с площадью ΔS_{km} . Пусть координата Y разбита на K частей и M разбиений по углу φ : $K = [a/\Delta y]$, $M = [2\pi/\Delta\varphi]$. Дискретные наборы $(\varphi_m, y_k) : \varphi_m = m\Delta\varphi, y_k = k\Delta y$ определяют элемент поверхности ΔS_{km} . Перейдем в (1) к сумме

$$\hat{R}(\mathbf{V}_0) = \frac{1}{S_0} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M H(\varphi_m, y_k, \mathbf{V}_0) \Delta S_{km}. \quad (2)$$

Если

$$H(\varphi_m, y_k, \mathbf{V}_0) = \{C_x^*, C_y^*, C_{mz}^*\}$$

— аэродинамические характеристики элемента ΔS_{km} , то $R(\mathbf{V}_0) = \{C_x, C_{y'}, C_{mz}\}$ — конструкции в целом. Определим касательную к элементу ΔS_{km} как

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = \mathbf{v} - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}_0 / |\mathbf{V}_0| .$$

Пусть $\beta = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = n_x \sin(\theta) - n_y \cos(\theta)$, тогда $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 - \beta^2}$ и получим нормированные значения $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} \tau_x = (\sin(\theta) - n_x \beta) / \sqrt{1 - \beta^2}, \\ \tau_{y'} = -(\cos(\theta) - n_y \beta) / \sqrt{1 - \beta^2}, \\ \tau_z = -n_x \beta / \sqrt{1 - \beta^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Далее, после того как \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ элементы ΔS_{km} определены, найдем угол атаки — θ^* под которым внешний поток падает на ΔS_{km} . По определению

$$\angle(\mathbf{V}_0, \mathbf{n}) = \frac{\pi}{2} - \theta^*, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta^*\right) = \sin(\theta^*) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) = \beta .$$

Следовательно, $\theta^* = \arcsin(\beta)$. Или $\cos(\theta^*) = (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) / |\boldsymbol{\tau}|$, и $\cos(\theta^*) = \sqrt{1 - \beta^2}$. Пусть для элемента ΔS_{km} определены аэродинамические коэффициенты C_n^* и C_τ^* , тогда C_x^* и C_y^* для элемента ΔS_{km} :

$$\begin{aligned} C_x^* &= C_n^* n_x + C_\tau^* \tau_x, \\ C_y^* &= C_n^* n_{y'} + C_\tau^* \tau_{y'}. \end{aligned} \quad (4)$$

После определения аэродинамических коэффициентов для элемента ΔS_{km} , подставим C_x^* и C_y^* в интегральную формулу (2) и получим C_x и $C_{y'}$ конструкции в целом после вычислений в (3),(4).

Построение вероятностной модели функции распределения при обтекании перфорированных тел.

Перейдем к рассмотрению физической картины течения при обтекании элемента сетчатой конструкции ΔS_{km} . В большинстве приложений можно считать элемент конструкции плоским перфорированным. В практических расчетах параболическая сетчатая (перфорированная) конструкция разбивалась на 10000 плоских элементов при интегрировании по поверхности, и тем самым сделанное допущение приемлемо.

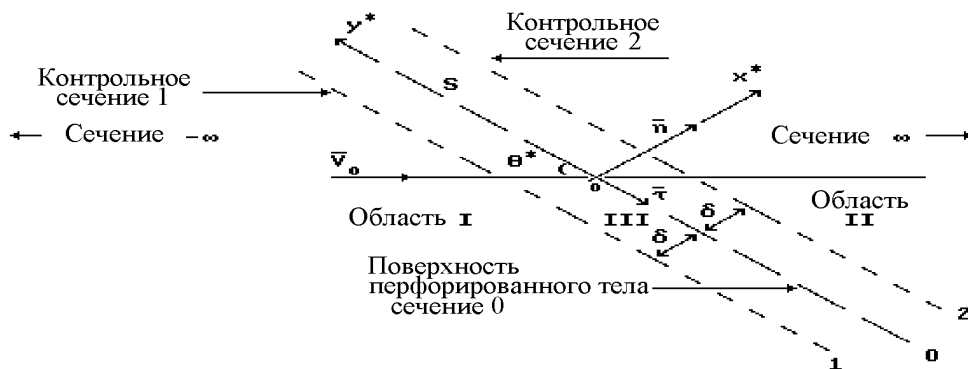


Рис. 2: Области течения и контрольные поверхности в модельной постановке задачи при обтекании перфорированного тела.

Пусть элемент поверхности расположен под углом атаки θ^* к набегающему потоку (образует угол $\frac{\pi}{2} - \theta^*$ между направлением \mathbf{V}_0 и \mathbf{n} внутренней нормалью к поверхности). Введем контрольные поверхности в сечениях 1, 0 и 2 (рис. 2), которые разделяют всю область течения на подобласти I, II, III. В центре области III находится решетка (сечение

0), и мы допускаем возможность свободномолекулярного предела при описании течения в области III с масштабом 2δ . Контрольные поверхности находятся на расстояниях $\pm\delta$ от решетки по направлению нормали. Будем предполагать, что $x^* < -\delta$ в области I и $x^* > \delta$ в II. В областях I, II течение считаем одномерным в физическом пространстве и имеющим симметрию по компонентам u_{y^*} , u_{z^*} скоростей частиц \mathbf{u} с учетом $l_0 > \delta \gg L$. В областях I и II возможны столкновения частиц, что должно привести к отличию параметров течения — (n_0, \mathbf{V}_0, T_0) вверх по потоку в бесконечно удаленной точке (сечение $-\infty$) от параметров течения в сечении I — (n_1, \mathbf{V}_1, T_1) и в сечении 2 — (n_2, \mathbf{V}_2, T_2) . Параметры далеко вниз по потоку — (n, \mathbf{V}, T) в сечении ∞ , должны отличаться от параметров в сечениях $-\infty, 1, 0, 2$. В силу большого различия масштабов мы можем считать, что направление макроскопической скорости потока в сечениях $-\infty, 1, 0, 2, \infty$ сохраняется, но изменяется по абсолютной величине, при рассмотрении элемента ΔS_{km} .

Тогда векторы скоростей потоков в сечениях $-\infty, 1, 0, 2$ и ∞ можно представить как

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i &= (V_{in}, V_{i\tau}, 0); \quad V_{in} = V_{in}(x^*), \quad V_{i\tau} = V_{i\tau}(x^*), \\ V_{in} &= V_{in} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta^*\right) = V_i \sin(\theta^*), \\ V_{i\tau} &= V_i \cos(\theta^*), \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Введем обозначение для локального равновесного распределения Максвелла-Больцмана:

$$f_M(n_i, \mathbf{V}_i, T_i, \mathbf{u}) = n_i \left[\frac{m}{2kT_i\pi} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left\{ -\frac{m}{2kT_i} (\mathbf{u} - \mathbf{V}_i)^2 \right\}. \quad (5)$$

Пусть n_{ir} — концентрация, \mathbf{V}_{ir} — макроскопическая скорость и T_{ir} — температура отраженных частиц. Функция распределения, которая описывает отраженные от поверхности S частицы и пришедшие в сечение 1, вверх по потоку: $f_r(n_{1r}, \mathbf{V}_{1r}, T_{1r}, \mathbf{u})$, а в сечение 2 — $f_r(n_{2r}, \mathbf{V}_{2r}, T_{2r}, \mathbf{u})$. Ранее считалось, что взаимодействие частиц с поверхностью описывается диффузной макротрансформантой [1, 2].

Наиболее существенным предположением в данной теории является следующее. Полагаем, что частицы из области I придут с локальным распределением Максвелла в сечение 1, но с измененными параметрами и, соответственно в сечение 2 придут частицы с распределением (5), но с параметрами $(n_{2r}, \mathbf{V}_{2r}, T_{2r})$.

В сечениях 1 и 2 выделяется три типа частиц, третьим из которых являются частицы, прошедшие сквозь решетку. Если $p = d/D$ — коэффициент перфорации, где d — суммарная площадь отверстий, а общая площадь потока D , то через решетку проходит p -я часть частиц каждого сорта.

Модель функции распределения в сечении 1 и $x^* = -\delta$:

$$f_1(\mathbf{u}) = \begin{cases} f_M(n_1, \mathbf{V}_1, T_1, \mathbf{u}), & u_n > 0; \\ pf_M(n_2, \mathbf{V}_2, T_2, \mathbf{u}) + (1-p)f_r(n_{1r}, \mathbf{V}_{1r}, T_{1r}, \mathbf{u}), & u_n < 0. \end{cases} \quad (6)$$

В сечении решетки 0, где $x^* = 0$:

$$f_0(\mathbf{u}) = \begin{cases} f_M(n_1, \mathbf{V}_1, T_1, \mathbf{u}), & u_n > 0; \\ f_M(n_2, \mathbf{V}_2, T_2, \mathbf{u}), & u_n < 0. \end{cases} \quad (7)$$

В сечении 2, $x^* = \delta$:

$$f_2(\mathbf{u}) = \begin{cases} f_M(n_2, \mathbf{V}_2, T_2, \mathbf{u}), & u_n < 0; \\ pf_M(n_1, \mathbf{V}_1, T_1, \mathbf{u}) + (1-p)f_r(n_{2r}, \mathbf{V}_{2r}, T_{2r}, \mathbf{u}), & u_n > 0. \end{cases} \quad (8)$$

На большом удалении вверх по потоку в области I распределение задано: $f_M(n_0, \mathbf{V}_0, T_0, \mathbf{u})$, а на большом удалении вниз по потоку в области II распределение — $f_M(n, \mathbf{V}, T, \mathbf{u})$, где n, \mathbf{V}, T подлежат определению наряду с

$$n_1, n_2, n_{1r}, n_{2r}, \mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_{1r}, \mathbf{V}_{2r}, T_1, T_2, T_{1r}, T_{2r}.$$

Эта модель функции распределения была предложена В.Б.Христиничем. Совместно с Ю.Ф.Гуныко построена система уравнений для определения неизвестных для $\theta^* = 90^\circ$ в 1984-1985 г. [1, 2]. Для произвольных θ^* система уравнений была построена и решена численно и аналитически в асимптотическом приближении больших скоростей В.Б.Христиничем в 1987- -1996г. [3, 4].

Взаимодействие разреженного газа с перфорированной поверхностью и построение уравнений сохранения

Рассмотрим взаимодействие с поверхностью. Считаем поверхность элемента ΔS_{km} кусочно-гладкой, класса C_1 . Пусть \mathbf{n} — нормаль поверхности. Рассмотрим скорости частиц \mathbf{u} , такие, что

$$\mathbf{u} \in \{\mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) > 0\} = \Omega(\mathbf{u}),$$

тогда при $\mathbf{r} \in \Delta S_{km}$ и $\mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{u})$ плотность распределения отраженных частиц $f_r(n_{ir}, \mathbf{V}_{ir}, T_{ir}, \mathbf{u})$ будет удовлетворять уравнению

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) f_r(\mathbf{u}, \mathbf{r}) = - \int_{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) < 0} T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) f_r(\mathbf{u}_1, \mathbf{r}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1.$$

Функция $T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)$ — граничная трансформанта, плотность распределения отраженных частиц, удовлетворяет в $\Omega(\mathbf{u})$ условию нормировки

$$\mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{u}), \quad T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \geq 0, \quad \int_{\Omega(\mathbf{u})} T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u} = 1,$$

в остальных случаях $T(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = 0$.

При диффузно-зеркальном отражении с λ долей диффузно отраженных частиц

$$f_r(n_{ir}, \mathbf{V}_{ir}, T_{ir}, \mathbf{u}) = (1 - \lambda) f_M(n_i, \mathbf{V}_i, T_i, \mathbf{u} - 2\mathbf{n}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) + \lambda f_M(n_{ir}, 0, T_{ir}, \mathbf{u}).$$

В предположении, что отражение частиц описывается диффузной макротрасформантой ($\lambda = 1$), упрощается задача отыскания неизвестных. Если $N_i(n_1, \mathbf{V}_1, T_1)$ — поток числа частиц, падающих на решетку из области I, фиксируемый в сечении 1, а $N_i(n_2, \mathbf{V}_2, T_2)$ — из области II на решетку, то концентрация отраженных частиц:

$$\begin{aligned} n_{1r} &\equiv n_{1w} = 2\sqrt{\pi} N_i(n_1, \mathbf{V}_1, T_1) / c_w, & u_n < 0; \\ n_{2r} &\equiv n_{2w} = 2\sqrt{\pi} N_i(n_2, \mathbf{V}_2, T_2) / c_w, & u_n > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

$V_{1r} = V_{2r} = 0$, $T_{1r} = T_{2r} = T_W$, и $c_w = \sqrt{2RT_W}$, т.е. допускается полная термическая аккомодация $f_r(n_{ir}, \mathbf{V}_{ir}, T_{ir}, \mathbf{u}) = f_M(n_{iw}, 0, T_W, \mathbf{u})$, $i = 1, 2$. Оставшиеся 9 неизвестных находятся из уравнений сохранения для трех областей I, II и I+III+II. Учтем внутренние степени свободы, полагая, что средняя внутренняя энергия молекул газа равна $0.5 k T(5 - 3\gamma)/(\gamma - 1)$. [6]

Для стационарного течения газа в случае отсутствия внешних сил выполняются следующие уравнения, выражающие дифференциальную форму законов сохранения потоков массы, импульса и энергии:

$$\frac{d}{dx^*} \int_{(\mathbf{u})} u_{x^*} \psi(\mathbf{u}) f(x^*, \mathbf{u}) d\omega = 0, \quad \psi(\mathbf{u}) = \{m, m\mathbf{u}, m \frac{u^2}{2}\}. \quad (10)$$

Для всей области течения в целом I+III+II с учетом импульса P_{st} и энергии E_{st} , приносимых на единицу поверхности решетки в единицу времени, получим:

$$\begin{aligned} mn_0 \mathbf{V}_0 &= m n \mathbf{V} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{j}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_0) + \mathbf{n}(n_0 k T_0) &= \mathbf{j}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{n}(n k T) + P_{st}, \\ j_n \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) k T_0 + \frac{1}{2} V_0^2 \right) &= j_n \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) k T + \frac{1}{2} V^2 \right) + E_{st}. \end{aligned} \quad (11)$$

Обозначим набор переменных (n_i, \mathbf{V}_i, T_i) одним индексом $I = 1, 2$. Для каждой области течения I, II, III, допуская зависимость переменных n_i, \mathbf{V}_i, T_i от x^* , можно подставить в (10) соответствующие функции распределения (6)–(8) и получить системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решая их, найти зависимости от x^* всех основных параметров. Такой путь возможен, но трудно преодолим в аналитической форме. Даже фиксируя консервативные величины на границах областей и получая систему алгебраических трансцендентных нелинейных уравнений, мы в состоянии решить ее аналитически только в асимптотическом пределе для больших скоростных отношений $S_i > 3$; $S_i = V_i/c_i$, где $c_i = \sqrt{2RT_i}$, $i = 0, 1, 2$. Положение спасает то обстоятельство, что такие S_i приемлемы для практики и сравнения с имеющимся экспериментом при $S_0 = 2.8$.

Приравнивая консервативные величины на границах областей, получим для области течения I:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{N}_i(1) - \mathbf{N}_i(2)) &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{P}_i(1) + p\mathbf{P}_i(2) + \frac{m}{2} \sqrt{\pi} c_w (1-p) \mathbf{N}_i(1) &= \mathbf{j}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_0) + \mathbf{n}(n_0 k T_0), \\ E_i(1) + E_i^B(1) - p\{E_i(2) + E_i^B(2)\} - 2kT_W(1-p)N_i(1) - \\ - E_W^B(1) &= j_n \left\{ \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right\} RT_0 + \frac{1}{2} V_0^2 \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для области течения II первое уравнение — сохранения потока массы тождественно первому уравнению в системе (12) для области I. Остальные уравнения для области II имеют вид:

$$-\mathbf{P}_i(2) + p\mathbf{P}_i(1) + \frac{m}{2} \sqrt{\pi} c_w (1-p) \mathbf{N}_i(2) = \mathbf{j}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{n}(n k T), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -E_i(2) - E_i^B(2) + p\{E_i(1) + E_i^B(1)\} + 2kT_W(1-p)N_i(2) + \\ + E_W^B(2) &= j_n \left\{ \left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right\} RT + \frac{1}{2} V^2 \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Импульс и энергия, приносимые на решетку из системы (11):

$$\mathbf{P}_{st} = (1-p) \left[\mathbf{P}_i(1) - \mathbf{P}_i(2) + \frac{m}{2} \sqrt{\pi} c_w (\mathbf{N}_i(1) - \mathbf{N}_i(2)) \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E_{st} &= (1-p) \{ E_i(1) + E_i(2) + E_i^B(1) + E_i^B(2) - \\ - 2kT_W(N_i(1) + N_i(2)) - E_W^B(1) - E_W^B(2) \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражения для потоков гидродинамических величин.

Приведем полные выражения для потоков: $N_i, P_i, E_i; E_i^B$ — потока внутренней энергии падающих частиц и E_W^B — потока внутренней энергии отраженных частиц. Все эти величины выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$ и их можно свести к набору функций: $\exp()$ и $\operatorname{erf}()$ [8].

Рассмотрим систему координат связанную с поверхностью i – го сечения потока или поверхностью решетки. Обозначая набор переменных (n_j, \mathbf{V}_j, T_j) через $I = 1, 2$ и полагая $S_{\theta_j} = (-1)^{j-1} S_j \sin(\theta^*)$ и $T_{W0} = T_W/T_0$, а $c_{j0} = c_j/c_0$, $n_{j0} = n_j/n_0$, $j = 1, 2$, запишем выражения для потоков в проекции на внутреннюю нормаль к поверхности [6].

Потоки числа частиц:

$$\begin{aligned} N_i(I) &= N_i(n_j, \mathbf{V}_j, T_j) = \int_{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) > 0} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) f_M(n_j, \mathbf{V}_j, T_j, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{y^*} du_{z^*} \int_0^{+\infty} u_{x^*} f_M(n_j, \mathbf{V}_j, T_j, \mathbf{u}) du_{x^*} = n_j c_j \chi(S_{\theta_j}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где} \quad \chi(a) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (\exp(-a^2) + \sqrt{\pi} a (1 + \operatorname{erf}(a))) . \quad (18)$$

Потоки импульса падающих частиц на поверхность:

$$\begin{aligned} P_i(I) &= P_i(n_j, \mathbf{V}_j, T_j) = \int_{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) > 0} m (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1)^2 f_M(n_j, \mathbf{V}_j, T_j, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 = \\ &= m n_j \frac{c_j^2}{2} \psi(S_{\theta_j}), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{где} \quad \psi(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (a \exp(-a^2) + \sqrt{\pi} (0.5 + a^2) (1 + \operatorname{erf}(a))) . \quad (20)$$

Поток энергии поступательных степеней свободы:

$$\begin{aligned} E_i(I) &= E_i(n_j, \mathbf{V}_j, T_j) = \int_{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) > 0} \frac{m u^2}{2} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1) f_M(n_j, \mathbf{V}_j, T_j, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1 = \\ &= \frac{1}{4} m n_j c_j^3 \epsilon(S_{\theta_j}), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\text{где} \quad \epsilon(S_{\theta_j}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ (S_j^2 + 2) \exp(-S_{\theta_j}^2) + \sqrt{\pi} S_{\theta_j} (2.5 + S_j^2) [1 + \operatorname{erf}(S_{\theta_j})] \right\} . \quad (22)$$

Поток энергии внутренних степеней свободы:

$$E_i^B(I) = \left(\frac{5 - 3\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{m n_i}{4} c_j^3 \chi(S_{\theta_j}) . \quad (23)$$

Поток энергии поступательных степеней свободы для частиц отраженных от поверхности:

$$E_W(I) = m n_j c_j c_W^2 \chi(S_{\theta_j}) . \quad (24)$$

Поток энергии внутренних степеней свободы для частиц отраженных от поверхности:

$$E_W^B(I) = \left(\frac{5 - 3\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{m n_j}{4} c_W^2 c_j \chi(S_{\theta_j}) . \quad (25)$$

Поток импульса отраженных частиц от поверхности:

$$-\frac{m}{2} \sqrt{\pi} c_w n_j c_j \chi(S_{\theta_j}) .$$

Импульс, приносимый на поверхность решетки в единицу времени, на единицу поверхности в проекции на нормаль:

$$P_{st_n} = (1-p) \frac{m n_0 c_0^2}{2} \left\{ n_{10} c_{10}^2 \psi(S_1 \sin(\theta^*)) - n_{20} c_{20}^2 \psi(-S_2 \sin(\theta^*)) + \sqrt{\pi T_{W0}} [n_{10} c_{10} \chi(S_1 \sin(\theta^*)) - n_{20} c_{20} \psi(-S_2 \sin(\theta^*))] \right\}. \quad (26)$$

Касательная составляющая приносимого импульса на поверхность решетки в единицу времени на единицу поверхности:

$$P_{st_\tau} = (1-p) m \cos(\theta^*) \sum_{j=1,2} (-1)^{j-1} n_j c_j^2 S_j \chi(S_{\theta_j}). \quad (27)$$

Поток энергии на единицу поверхности решетки в единицу времени получаем подстановкой (17), (18), (21)–(25) в (16):

$$E_{st} = (1-p) \frac{m n_0 c_0^3}{2} \left[\left(S_0^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} - \frac{T_{W0}}{2} \left\{ \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right\} \right) \left(\chi(S_0 \sin(\theta^*)) + \chi(-S_0 \sin(\theta^*)) - \frac{\exp(-(S_0 \sin(\theta^*))^2)}{2\sqrt{\pi}} \right) \right]. \quad (28)$$

В итоге мы получили систему алгебраических трансцендентных нелинейных уравнений (11)–(14). Ее решение "в лоб" в [1] с использованием современных вычислительных методов не привело к легко получаемым результатам, так как в целом система содержит не менее трех точек ветвления. С точки зрения космической практики необходимы большие значения скоростных отношений $S_j \geq 8$. В этом случае все встречающиеся функции имеют асимптотические значения, аппроксимирующие исходные функции с большой точностью. Практически приемлемые результаты получаются начиная с $S_j > 3$.

К сожалению, эксперимент [3], направленный на получение результатов при обтекании решеток и для сравнения с данной теорией, был выполнен при $S_j = 2.8$ в силу особенностей установки. И тем не менее, хорошее совпадение по C_x для небольших углов атаки (не менее 45°) по C_y для плоских решеток из круглых проволок подтвердило возможность асимптотического подхода.

Функции: $\chi(a)$, $\psi(a)$, $\epsilon(a)$ встречается в большом числе приложений кинетической теории. Отметим их некоторые свойства, необходимые в дальнейшем. В отличие от других работ [5, 6, 7] выразим их через вырожденные гипергеометрические функции Гаусса — ${}_1F_1(\alpha, \gamma; x)$ и дадим выражение через быстро сходящийся, просто программируемый ряд. На основании общих свойств вырожденных гипергеометрических функции Гаусса, легко получить и асимптотические представления.

Функция $\chi(a)$ из (18):

$$\chi(0) = 1/(2\sqrt{\pi}), \quad \chi(a) = \chi(-a) + a; \\ \lim_{a \rightarrow \infty} \chi(a) = a, \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \chi(a) = 0; \quad (29)$$

Выразим функцию $\chi(a)$ через ${}_1F_1$. Дадим два представления:

$$\chi(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(z\sqrt{\pi} + {}_1F_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -z^2 \right) \right), \quad (30)$$

$$\chi(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(z\sqrt{\pi} + \exp(-z^2) {}_1F_1 \left(1, \frac{1}{2}; z^2 \right) \right). \quad (31)$$

Представления (30),(31) дают возможность, используя известные свойства вырожденных гипергеометрических функций Гаусса, получить предельные значения и асимптотические разложения [8].

Разложения в ряды по многочленам Чебышева и приближения Паде для функций ${}_1F_1(\alpha, \gamma z)$ строились в [8], но для расчетов в данном случае проще использовать быстро сходящийся и просто программируемый ряд:

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -z^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{(2n-1)n!} . \quad (32)$$

При проведении вычислений с использованием ряда (32) трудностей не возникает. Для проведения вычислений $\psi(a)$ достаточно знать, что

$$\psi(a) = \chi(a) \left(2a + \frac{1}{a}\right) - \frac{\exp(-a^2)}{2a\sqrt{\pi}} . \quad (33)$$

Что же касается функции $\epsilon(S_{\theta j})$, то ее удобнее вычислять из выражения

$$\epsilon(S_{\theta j}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ 4\sqrt{\pi}(2.5 + S_{\theta j}^2)\chi(S_{\theta j}) - \exp(-S_{\theta j}^2) \right\} , \quad (34)$$

которое удобнее и проще, чем обычно приводимая в литературе запись (22).

Наша цель — дать заключительные выражения, по которым проводился счет коэффициентов C_n , C_τ и $n(x^*)$, $\mathbf{V}(x^*)$, $T(x^*)$ в различных сечениях. Приведем асимптотические выражения для выше перечисленных величин: — поток частиц $N_i(I) \approx n_i c_i S_i \sin(\theta^*)$, — поток импульса падающих частиц на поверхность:

$$P_i(I) \approx 0.5mn_i c_i^2 (S_i \sin(\theta^{star}))^2 + 1) ,$$

— поток энергии поступательных степеней свободы:

$$E_i(I) \approx 0.25mn_i c_i^3 S_i \sin(\theta^*)(5 + 2S_i^2) ,$$

— поток энергии внутренних степеней свободы:

$$E_i^B(I) \approx \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{m n_i}{4} c_i^3 S_i \sin(\theta^*) , \quad (35)$$

— поток импульса отраженных частиц от поверхности:

$$-\frac{m}{2}\sqrt{\pi} c_W n_i c_i S_i \sin(\theta^*) ,$$

— поток энергии внутренних степеней свободы для частиц, отраженных от поверхности:

$$E_W^B(I) = \frac{5-3\gamma}{\gamma-1} \frac{mn}{4} c_W^2 c_i S_i \sin(\theta^*) , \quad (36)$$

— поток энергии поступательных степеней свободы для частиц, отраженных от поверхности:

$$E_W(I) = mn_i c_i^2 c_W S_i \sin(\theta^*) ,$$

— импульс, приносимый на поверхность решетки в единицу времени, на единицу поверхности, в проекции на нормаль получим из (26):

$$P_{st_n} = \frac{mn_1 c_1}{2} (1-p)[c_1(2S_1 \sin(\theta^*))^2 + 1] + \sqrt{\pi} c_W S_1 \sin(\theta^*) , \quad (37)$$

— поток энергии на единицу поверхности решетки в единицу времени получим из (28):

$$E_{st} = 0.5(1 - p)mn_1c_1S_1 \sin(\theta^*) \left[c_1^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} + S_1^2 \right) - 0.5c_W^2 \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \right]. \quad (38)$$

Продолжение работы опубликовано в следующем номере Вестника СПбГУ. Выпуск 3, (№15), с. 132—141.

SUMMARY

Khristinich V. B. The model of the hypersonic rarefied gas flow in transitional regime over space antennae. Part I.

Consideration is given to model of the hypersonic transitional flow regime over space antennae. The model was used for studying aerodynamic characteristics of parabolic antenna with real wire netting elements were simulated by perforated plates. Model of nonequilibrium flows description can give an opportunity to determine some parameters in a flow field as well. The model of low density gas flow in perforated bounds has been developed for transparent surface when direct simulation Monte—Carlo method loses efficiency. Numerical results of studying aerodynamic characteristics and parameters in a flow field are presented.

Foundation of the problem is given in a first part of article.

Список литературы

- [1] *Гунько Ю. Ф., Христинич В. Б.* Расчет сопротивления плоской решетки в потоке разреженного газа // Молекулярная газовая динамика и динамика разреженного газа: Материалы VII Всесоюзной конференции по МГД и ДРГ. М., Изд-во АН СССР, 1985, том 1, с. 250–258.
- [2] *Гунько Ю.Ф., Христинич В.Б.* Аэродинамические характеристики перфорированной пластины в потоке газа низкой плотности. //Газодинамика и теплообмен, Вып. 8. Л., 1984. с. 183–196.
- [3] *Крылов А.А., Рудаков Р.Р., Стариков Б.Б., Христинич В.Б.* Аэродинамика решеток в разреженном газе. // Аэродинамика, тепло и массообмен в разреженном газе: Труды VIII Всесоюзной конференции по ДРГ. М., 1987. С. 26–30.
- [4] *Христинич В.Б.* Модель течения газа низкой плотности в перфорированных границах для расчета аэродинамики космических антенн. // Труды XIII сессии международной школы по моделям механики сплошной среды. Издательство Санкт-Петербургского Университета, Санкт-Петербург 1996, с. 65 - 80.
- [5] *Кошмаров Ю.А., Рыжов Ю.А.* Прикладная динамика разреженного газа. М.: "Машиностроение 1977, 184 с.
- [6] *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М., "Наука 1967, 440 с.
- [7] *Баранцев Р.Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. М., "Наука 1975, 343 с.
- [8] *Люк Ю.Л.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М., "Мир 1980, 608 с.